A 37. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2006

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2006-ban is meghirdeti a hagyományos, immár 37-ik, ezúttal már kilencedszer nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2006. október 27 – november 6.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok **2006. október 27-én, pénteken, közép-európai idő szerint 12 órától (10:00 GMT)** magyar és angol nyelven, html, LaTeX, pdf és Postscript formátumban **letölthetők** az Ortvay-verseny weblapjáról:

http://ortvay.elte.hu/

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE lágymányosi Fizika–Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.106 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldása maximálisan 100 pontot ér.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható.* Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX PDF vagy Postscript formátumban) lehet beküldeni. Kérjük a versenyzőket, hogy csak az alapvető LaTeX stílusfájlokat használják, vagy a felhasznált speciális stílusfájlokat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolni a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.106 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722753 vagy Cserti József, 36/1/3722866
E-mail cím: dgy@elte.hu

Beadási határidő: 2006. november 6. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat! Az adatlap csak november 6-án és 7-én lesz elérhető, kérjük mielőbb kitölteni!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsűri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó 1., 2. és 3. díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A verseny eredményhirdetése december 7-én lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat az eredményhirdetésen nyújtjuk át, illetve külföldre postán küldjük el.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői: Dávid Gyula, Tóth Bálint, Lukács Árpád, Cserti József

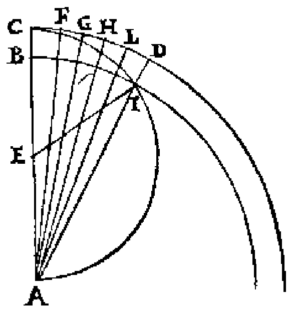
1. A Galaxis Útikalauz fanatikusoknak szóló hirdetési mellékletéből:
Űrturisták! Fizikusok! Meteorológusok! Hozzáértők és bámészkodók! Használják ki a soha vissza nem térő alkalmat, és látogassák meg (természetesen irodánk, a Cartesius Űrutazások szervezésében) a Gumikutya csillagkép Omikron csillagának negyvenkettedik bolygóját, a Geminflectot, a galaxishírű Zenitoális szivárvány hazáját! Űrruhát és oxigénmaszkot természetesen minden vendégünknek biztosítunk.

Amikor a Gumikutya Omikronja hajnalban felbukkan a Geminflecto egyenlítői dzsungeléből kiemelkedő kopár, dérlepte Nagy Fennsík keleti horizontján, vendégeink páratlan látványnak lehetnek szemtanúi. Fejük fölött teljes félkört alkotva, pontosan a zeniten áthaladva, egy gyönyörű, fényes, 20 fok szélességű szivárvány húzódik. Sajnos az Omikron forró sugarai néhány perc múlva véget vetnek a tüneménynek. Vendégeink a további órákat egy légkondcionált óvóhelyen tölthetik, majd a naplemente előtt néhány perccel ismét kimerészkedhetnek a szabad ég alá, a lassan hűlő fennsíkra. Ugyanis a csodálatos jelenség, a Zenitoális szivárvány este, a naplemente pillanatában is megismétlődik.

Meg kell jegyeznünk, hogy Zenitoális szivárványt mindkét esetben egy még fényesebb szivárvány kiséri a nyugati égbolton. Ügyfeleink általában a zeniten megjelenő híres szivárványt bámulják, ezért a Nyugati Szivárványról (annak reggeli és esti helyzetéről és szélességéről) irodánk nem rendelkezik pontos adatokkal. Kérjük ezért fizikus vendégeinket, hogy amennyiben ezen adatok birtokába jutnak, közöljék velünk! Azt is megköszönjük, ha magyarázatot adnak a reggeli és esti Zenitoális és Nyugati Szivárvány keletkezésére. A pontos adatokat szolgáltató ügyfeleinket űrhajófordultával meghívjuk egy luxus turistaútra, a Geminflecto bolygóra, a Zenitoális szivárvány megtekintésére. (Jó, jó, tudjuk, hogy könnyebb lenne adatokat szolgáltatni az utazás után, a helyszínen végzett mérések alapján, de azt is tudjuk, hogy fizikus ügyfeleinket ez az apró nehézség nem tántorítja el a probléma megoldásától.) Utazás irodánk természetesen a Galaxis más tájaira is elviszi érdeklődő ügyfeleinket. További részletek a 2007 októberében megjelenő új katalógusunkban.

(Dávid Gyula és Cserti József)

2.



1632-ben megjelent „Dialogo"-jában (lásd a mellékelt eredeti ábrát) Galilei azt állítja, hogy a forgó Föld egy tornyából leejtett tárgy álló koordinátarendszerből nézve olyan körpálya mentén mozog, mely – ha abban a Föld nem akadályozná meg – áthaladna a Föld középpontján. Milyen lenne a tömegvonzás törvénye, ha Galilei állítása igaz lenne? (A torony – Galilei szerint – *bárhol* lehet a Földön (a sarkok kivételével), és (elvileg) akármilyen magas lehet. Egy külső inerciarendszerből nézve a Föld forgása kezdősebességet ad a leejtett golyónak. A torony csúcsa és a kezdősebesség vektora meghatározza a Föld egy főkörét. Az ábrán ez a főkör látható.)

(Horváthy Péter)

3. Számoljuk ki, hogy a Föld Nap körüli keringése során hogyan alakul a nappal és a szürkület hossza az egyes földrajzi szélességeken! Jelölje γ azt a szélességet, ahol a Nap a zeniten delel ($|\gamma| \leq \gamma_{max}$)! Legyen $\gamma = 0$, ha a Nap az egyenlítőre merőlegesen süt, és $\gamma > 0$, ha az északi féltekén tavasz vagy nyár van! Egy adott ponton szürkület akkor van, ha a Nap a horizont alatt van, de nincs lejjebb, mint egy adott α szög. Adott γ érték mellett számoljuk ki, hogy az egyes földrajzi szélességeken milyen hosszú a nappal és a szürkület hossza! Vizsgáljuk a teljes Földet! Adjuk meg, hogy az egyes szélességeken mikor a leghosszabb és mikor a legrövidebb a szürkület (milyen γ értéknél, és ez milyen évszaknak felel meg)!

Használjuk az alábbi közelítéseket:
a) A Földet tekintsük gömb alakúnak!
b) Tekintsük úgy, hogy a Nap pontosan a Föld egyik felére süt (azaz a Föld felén van a horizont felett)!
c) Tekintsünk el a nappalok rövidüléséből vagy hosszabbodásából származó effektustól! Azaz a reggeli és esti szürkület hosszát tekintsük egyformának, és adott γ mellett ne foglalkozzunk annak változásával!
d) $0^o < \gamma_{max} < 45^o$ értéket válasszunk! A valóságban természetesen $\gamma_{max} = 23,5^o$.
e) A szürkületi terület nagyságát válasszuk realisztikusan! Azaz legyen olyan γ érték, hogy valamelyik sarkpont teljesen sötétben legyen! (A valóságban $\alpha = 18^o$ az elfogadott érték.)

(Fekete Júlia és Máté György)

4. Egy motorversenyen azt látjuk, hogy a motorosok egyenletes sebességgel haladva egy hosszú balkanyarban mintegy 60 fokos szögben „dőlnek be" a függőlegeshez képest. Legalább mekkora kell legyen a kerekek és a talaj közötti súrlódási együttható, hogy ne csússzanak ki?

Az egyik versenyző kereke – gondoljuk csak el (!) – műszaki hiba miatt kiesik, majd az eredeti sebességével és dőlésszögével halad tovább. Vajon elhagyja-e a kerék a pályát, s ha igen, balra vagy jobbra fog letérni az aszfaltcsíkról?
(A hiányzó adatokat vegyük fel életszerűen!)

(Gnädig Péter)

5. Dirac egy javaslata szerint (lásd P. A. M. Dirac, *A new basis for cosmology.* Proc. Roy. Soc. A **165** (1938) 199-208) Newton törvényében a gravitációs állandó nem lenne konstans, hanem az idővel fordított arányban változna :

$$G = G(t) = G_0 \frac{t_0}{t},$$

ahol t_0 egy állandó és t a világegyetem életkora. Írjuk le a bolygók mozgását Dirac módosított elméletében !

(Horváthy Péter)

6. Egy felfüggesztett rugó a saját súlyánál fogva megnyúlik. Hogyan mozog a kezdetben nyugalomban lévő rugó, ha a felfüggesztés megszűnik?

(Groma István)

7. Lehetséges-e, hogy egy hintaló rezgései csillapodásuk közben felgyorsulnak?

(Haiman Ottó)

8. Elméleti fizikusok egy csoportja azon elmélkedik: vajon mit kapott volna Rutherford a híres szóráskísérletében, ha a világunk kétdimenziós lenne?

   Kísérleti fizikus kollégáink veszik a fáradságot, és (a mi háromdimenziós világunkban) mérésekkel is megvizsgálják ezt a kérdést. Egy r sugarú, nagyon vékony, hosszú drótszálat úgy töltenek fel, hogy a tőle L távolságban levő nagyméretű, földelt, sík alakú fémlemez és a drótszál közé U feszültséget kapcsolnak. A fémlemezen kicsiny nyílásán keresztül monoenergetikus ionnyaláb érkezik merőlegesen a drótszálra, majd azon (annak elektrosztatikus terén) szóródik. A szórt részecskéket a száltól messze (L-nél sokkal nagyobb távolságra) elhelyezett detektorral észlelik.

   Hogyan függ a szóráskísérletben mérhető (alkalmas módon definiált) differenciális „hatáskeresztmetszet" a szórási szögtől és a részecskék energiájától?

(Gnädig Péter)

9. Hogyan módosul relativisztikus részecskesebességek esetén a rögzített erőcentrum $V(\mathbf{r}) = \alpha/r$ centrális potenciálterén történő szórás differenciális hatáskeresztmetszetét leíró Rutherford-formula?

(Dávid Gyula)

10. Finomítsuk a merev gömbön történő szórás közismert problémájának leírását! Tételezzük fel, hogy az ütközéskor a „majdnem merev" gömb kissé benyomódik, és (igen nagy rugóállandójú) rugalmas erővel löki vissza a becsapódó lövedéket! (Az „igen nagy rugóállandó" azt jelenti, hogy a szóba jöhető energiatartományban a behatolás mélysége kicsi a gömb sugarához képest.) Számítsuk ki a szórás differenciális és teljes hatáskeresztmetszetét a klasszikus mechanikai szóráselméletben! Milyen határátmenettel kaphatjuk vissza a teljesen merev gömbre vonatkozó ismert eredményeket?

(Dávid Gyula)

11. Eötvös Loránd kísérletileg tanulmányozta a gravitációs gyorsulás értéket a Balaton jegén. A méréseihez a nagy pontosságú Eötvös-ingát használta. Azt szerette volna kimutatni, hogy vajon van-e olajmező a Balaton alatt. Nagyobb vagy kisebb a mért g gravitációs gyorsulás ahhoz képest, ha nem lenne olajmező a Balaton alatt? Modellezzük az olajmezőt egy h magasságú és R sugarú hengerrel, melynek súlypontja d távolságra van a vízfelszíntől! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a henger alaplapja párhuzamos a vízfelszínnel!

    a) Becsüljük meg, hogy hány százalékos g relatív eltérése az olajmező következtében! Ki lehet-e mutatni ezt az eltérést az Eötvös-ingával? Használjunk realisztikus paramétereket!

    b) Valójában az Eötvös-ingával az $U(\mathbf{r})$ gravitációs potenciálból képzett $P_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_k}$ tenzort lehet kimérni. (Itt x_i az $\mathbf{r}$ helyvektor i-dik koordinátája.) Határozzuk meg egy elhanyagolható vastagságú ($h \ll R$) henger alakú olajmezőre a $P_{ik}(\mathbf{r})$ tenzort!

(Cserti József)

12. A mester tiszteletére elnevezett *2001 Einstein* nevű kisbolygó egyesek szerint nem teljesen gömb alakú, hanem leginkább egy tojásra hasonlít. A legegyszerűbben úgy tudjuk elképzelni, ha egy tökéletes R sugarú félgömböt összeillesztünk egy fél forgásellipszoiddal, melynek alapja R sugarú kör, és az alaplapra merőleges magassága $(1+\epsilon)R$, ahol $\epsilon \ll 1$. Vajon mihez kell nagyobb erő: elcsúsztatni egymáson a kisbolygó két felét a forgástengely mentén, azzal párhuzamosan, vagy elcsúsztatni a félgömb alakú részt erre merőlegesen? Mekkora erőt kell kifejteni az egyes esetekben? (Tegyük fel, hogy a kisbolygó homogén tömegeloszlású! A kisbolygót a csúsztatás előtt mindkét esetben kettéfűrészeljük, így csak a gravitációt kell legyőzni.)

(Gáspár Merse Előd)

13. A közegellenállást kívánjuk modellezni az alábbi demonstrációs kísérleti eszközzel. Egy jól guruló kocsira sok különböző lengésidejű ingát szerelünk. Kezdetben a kocsi és az ingák állnak, aztán a kocsit meglökjük valamekkora kezdősebességgel. Az ingák lengeni kezdenek, a fázisuk hamarosan rendezetlenné válik és a kocsi felveszi a tömegközéppont sebességét. Átlagoljuk ki az ingák hatását! Milyen egyenlet írja le a kocsi mozgását, ha az ingák sokaságát jellemző $K(\omega) = \sum_\alpha \frac{\pi}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 \, \delta(\omega - \omega_\alpha)$ eloszlás $K(\omega) = \eta =$ konstans alakú? (m_α és ω_α az α-val indexelt matematikai ingák tömege, illetve körfrekvenciája.)

(Vladár Károly)

14. Szent Gallen, Svájc, a magyarok kalandozásai idején ... Hogyan működik az ősi magyar visszacsapó íj? A régészeti leletekből szerzett méreteket, hagyományos konstrukciót és anyagokat, valamint normális emberi anatómiát feltételezve számoljuk ki a nyíl gyorsulását és végsebességet az íj elhagyásáig! Milyen messze hordhattak ezek az íjak? Mi a szerepe a karoknak és szarvaknak? Könnyűek vagy nehezek legyenek a karok, szarvak? Érdemes-e nehéz díszítőelemeket aggatni a karokra? Nyúlós vagy nyújthatatlan legyen a húr?

(Márka Szabolcs)

15. A gyors folyókba esett fatörzsek víz fölé is kinyúló ágai gyakran periodikusan rezegnek a folyás iránya által meghatározott síkban. Modellezzük a jelenséget!

(Tél Tamás)

16. Közismert, hogy a Hold egyik oldala mindig a Föld felé néz, azaz forgása szinkronizálódott a Föld körüli keringésével. Ennek oka az árapály-erő által okozott rugalmas deformáció, melyet az égitest anyagának belső súrlódása csillapít. Megérthető-e ez az effektus, ha egy rögzített gravitációs centrum körül körpályán keringő deformálható bolygót két olyan tömegpont rendszereként modellezzünk, melyeket egy csillapított rugó köt össze?

(Tél Tamás)

17. Víz felületén – a felületi feszültség miatt – alumíniumpénz is képes „úszni”. Ha két alumíniumpénz is van a víz felszínén, szeretnek egymás közelébe kerülni, mintegy vonzzák egymást.

    Hogyan függ ez a vonzóerő a pénzek közötti távolságtól, ha a pénzek viszonylag messze vannak egymástól?

    (Vizsgálhatjuk a probléma „alacsonyabb dimenziós” változatát is.)

(Gnädig Péter)

18. Adott egy S felületű végtelen mély úszómedence. Mekkora teljesítményt kell kifejteniük a véletlenszerűen úszó embereknek ahhoz, hogy az úszómedencében keletkezett hullámok tipikus magassága h legyen?

(Hantz Péter)

19. Egy semleges fémgömböt egyenletesen forgatunk az egyik átmérője körül.

    a) Hogyan változik meg a töltéseloszlás a gömb belsejében és a felületén a forgás következtében?

    b) Milyen mágneses mező alakul ki a gömbön kívül?

    c) Magyarázhatja-e ilyen mechanizmus a Föld mágneses terét?

(Gnädig Péter)

20. Két egyforma, henger alakú zárt tartály áll egymás mellett a laboratóriumban. Mindegyikben ugyanolyan folyadék van, de különböző mennyiségben. A folyadék felett csak saját telített gőze található, mindkét tartályban ugyanakkora nyomáson és hőmérsékleten. Ha a hengereket melegíteni kezdjük, az egyikben emelkedik, a másikban süllyed a folyadék szintje. Hogyan lehetséges ez? Mi kellene ahhoz, hogy melegedés közben ne változzék a folyadékszint?

(Radnai Gyula)

21. A Föld átlagos hőmérsékletében megfigyelhető 100 éves melegedési trendet a mérések $a = 0.7\ ^0C/100$ év-nek adják. Ezt az értéket úgy számítják, hogy a megfigyelt évi átlagértékekhez (T_i, $i = 1, 2, ..., N = 100$) lineáris függvényt illesztenek $T_i = a\frac{i}{N} + b$, s a adja a trend N évre vonatkoztatott értékét. Az illesztés a legkisebb négyzetes eltérést keresve történik, azaz a és b paramétereket a $\sum_{i=1}^{N}[T_i - (a\frac{i}{N} + b)]^2$ kifejezést minimalizálva számítják.

A melegedéssel kapcsolatos vita részben azzal kapcsolatos, hogy a megfigyelt a érték statisztikus fluktuáció-e. A problémát nulladik közelítésben a következőképpen tárgyalhatjuk. Tegyük fel, hogy
a) Nincs trend, s az évi átlaghőmérsékletek egy $\bar{T}$ átlag körül ingadoznak.
b) Legyenek az éves ingadozások függetlenek egymástól.
c) Legyen az éves ingadozások eloszlásfüggvénye Gauss függvény, σ szórással.
d) Legyen $\sigma \approx 0.5\ ^0C$. Ezt az értéket a következő becslésből kaphatjuk: A napi hőmérsékletfluktuációkat $\delta T \approx 5 - 10\ ^0C$-nak tekinthetjük, s mivel az évi átlaghőmérséklet 365 napi átlagból adódik össze, ezért $\sigma \approx (5 - 10)\ ^0C/\sqrt{365} \approx 0.5\ ^0C$.

Világos, hogy ha a fentiekből kiindulva az $a > 0.7\ ^0C/100$ év-et kapnánk, akkor nincs értelme melegedési trendről beszélni. Az is világos, hogy a fenti problémában a átlaga $\bar{a} = 0$. Tehát a alatt a $\sqrt{a^2}$ mennyiséget kell értenünk. Mekkora $\sqrt{a^2}$, ha $N = 100$, s mekkora, ha $N = 10$?

(Rácz Zoltán)

22. Rugalmas, izotróp közegben a szimmetrikus ponthiba elmozdulástere:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta V}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

ahol ΔV a ponthiba által okozott térfogatváltozás. Mekkora két ponthiba között a kölcsönhatási energia?

(Tichy Géza)

23. Az Einstein-expressz hosszú, egyenes, vízszintes sinpályán halad állandó, a relativisztikus tartományba eső V sebességgel. Tekintsünk el a vagonok tömegétől, és modellezzük a kerekeket homogén sűrűségeloszlású korongokkal!
a) Számítsuk ki, hol van egy vonatkerék tömegközéppontja a bakterházhoz rögzített koordinátarendszerben! Ábrázoljuk a tömegközéppont helyzetét a vonat sebességének függvényében!
b) A mozdony gyorsít, vízszintes irányú erőt gyakorolva a szerelvényre. Egyesek szerint a kerekek tömegközéppontja megemelkedik. Hogy lehetséges ez, ha a kerekekre csak vízszintes irányú erő hat? Milyen erő végzi a függőleges irányú emelés munkáját?

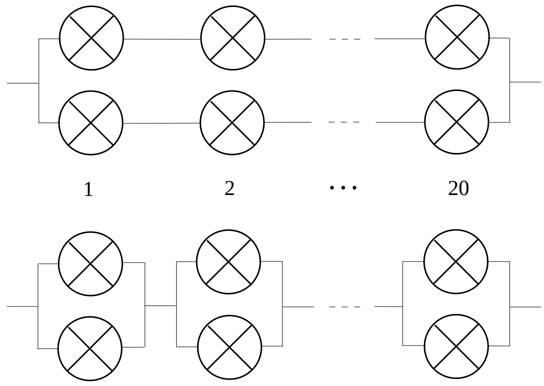
(Dávid Gyula)

24. A Zweistein-féle hiperrelativitás-elmélet egyesíti a newtoni és einsteini mechanikát, emellett további szédítő távlatokat nyit. Az elméletben a pontrészecske energiája és impulzusa közti kapcsolatot egy $E = f(p)$ szigorúan monoton növekvő függvény írja le, ahol p a $\mathbf{p}$ (hármas)impulzusvektor abszolút értéke. Ezt a kapcsolatot inkább a $Z(E)$ Zweistein-függvénnyel szokás felírni: $p^2/2 = Z(E)$. Ha $Z_0(E) = mE$, visszakapjuk a newtoni klasszikus mechanikát. A $Z_1(E) = (E^2 - m^2c^4)/2c^2$ formula elvezet a speciális relativitáselmélethez. És Zweisteinnek még van néhány dobása...

A klasszikus esethez hasonlóan legyen az $\mathbf{F}$ erő a $\mathbf{p}$ (hármas)impulzusnak, az $\mathbf{a}$ gyorsulás pedig a $\mathbf{v}$ (hármas)sebességnek a t rendszeridő szerinti deriváltja! Írjuk fel a $Z(E)$ Zweistein-függvény segítségével a részecske mozgásegyenletét a Newton-törvényhez hasonló $\mathbf{F} = \mathbf{Ma}$ alakban! (Javaslat: forduljunk tanácsért Lagrange és Hamilton urakhoz!) Tanulmányozzuk az $\mathbf{M}$ általánosított tömeg fizikai és matematikai tulajdonságait! Számítsuk ki a „transzverzális" és „longitudinális" tömeg értékét! Milyen alakú Zweistein-függvény esetén lesz e két tömeg hányadosa független a részecske energiájától? Vizsgáljuk meg részletesen a $Z_N(E) = \mu_N\,(E^N - E_0^N)$ alakú Zweistein-függvények esetét (ahol N pozitív szám, μ_N pedig megfelelő dimenziójú pozitív állandó)! Válasszuk külön az $E_0 = 0$ alesetet!

(Dávid Gyula)

25. Tekintsük 40 azonos villanykörte kétféle kapcsolását:
a) 20–20 körtét sorba kötünk, majd a két ágat párhuzamosan.
b) 2–2 körtét párhuzamosan kötünk, majd a 20 párat egymással sorosan.
A körték egymástól függetlenül, Poisson-folyamat szerint éghetnek ki, lokálisan megszakítva az áramkört. Vizsgáljunk kétféle modellt: az egyik szerint a Poisson-intenzítás (azaz a Poisson-eloszlás paramétere) nem függ a körtére eső teljesítménytől, a másik szerint azzal egyenesen arányos. Mi lesz az első kiégés idejének eloszlása, várható értéke? Mi lesz a második kiégés várható ideje? Mi lesz a várható értéke a kapcsolás teljes megszakadásának? Melyik kapcsolás a „stabilabb”?



(Bihary Zsolt)

26. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fizikai rendszer Hamilton-operátorának egyik sajátállapota intelligens állapot (azaz a hely és az impulzus szórásának állapota felveszi a határozatlansági reláció által megengedett minimális értéket), akkor ez a rendszer a lineáris harmonikus oszcillátor, a vizsgált állapot pedig az alapállapot!

(Tichy Géza)

27. Az (x, y) síkban mozgó szabad elektron Hamilton-operátora a $\mathbf{p}^2/(2m)$ kifejezéssel adható meg ($\mathbf{p} = (p_x, p_y)$). Vizsgáljuk síkhullámok rugalmas szóródását egy szennyező által keltett spinfüggő $V(\mathbf{r})$ potenciálon! Rögzítsük a spin-kvantálási tengelyt az elektronok síkjára merőlegesen! Tudjuk, hogy a γ spinorral arányos amplitudójú, φ_0 szöggel jellemzett irányból beeső, $\mathbf{k}$ hullámszámú síkhullám rugalmas szóródását leíró energia-sajátfüggvény a szórócentrumtól távoli, (r, φ) polárkoordinátákkal adott P pontban

$$\psi(r, \varphi) \sim e^{i\mathbf{kr}}\gamma + \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} f(\varphi, \varphi_0)\gamma$$

alakba írható, ahol $f(\varphi, \varphi_0)$ egy 2×2-es komplex mátrix, az ún. szórásamplitudó-mátrix, és $r = |\mathbf{r}|$ a P pont és a szórócentrum távolsága. A szórópotenciál pontos ismerete nélkül határozzuk meg, hogy milyen következményei vannak az f szórásamplitudó-mátrixra nézve, ha a V spinfüggő potenciál invariáns
a) az időtükrözésre;
b) bármely, a z-tengely körüli forgatásra!

(Pályi András)

28. A legnehezebb ma ismert atommag a 118-as rendszámú és 294-es tömegszámú szupernehéz elem magja. Ezeket a magokat alacsony energiájú atommag-ütközésben állítják elő, ahol viszont csak nagyon kis számban keletkeznek. Azonban minden egyes példány esetében nagyon pontosan (1 mikroszekundum pontossággal) meg lehet mérni a keletkezése és az elbomlása között eltelt időt. Tételezzük fel, hogy egy hosszú kísérletben 5 ilyen mag életidejét sikerült megmérni, és az eredmények a következők lettek: 1,155 ms; 0,120 ms; 3,786 ms; 4,410 ms; 1,018 ms! Mekkora az ezekből meghatározott felezési idő bizonytalansága 66%-os megbízhatóság mellett? Határozzuk meg a mért felezési idő gyakoriságának eloszlását is!

(Horváth Ákos)

29. Egy nagy szoba levegőjében radon is található, radioaktív egyensúlyban a leányelemeivel. Egy szivattyúval néhány órán keresztül szivattyúzzuk át a levegőt egy szűrőn, a szűrési hatásfok 100%, az összes por rátapad a szűrőre (a Rn leányelemei nagyon jól tapadnak a porra). A szívás sebessége Q (m^3/s). Q kicsi, tehát ezalatt a néhány óra alatt a szoba térfogatának kis töredéke megy csak át a szivattyún. A $t = 0$ időpontban kikapcsoljuk a szivattyút, és elkezdjük a szűrőpapír alfa-sugárzását mérni. A detektorunk csak az α sugárzásra érzékeny. Mi lesz az alfa-intenzitás pontos időfüggése a következő órában, ha a Rn aktivitása a szobában 1000 Bq/m^3? Adjuk meg képlettel, és ábrázoljuk is az időfüggést! Törekedjünk képleteinket minél egyszerűbb és célszerűbb formában felírni! A radon bomlási sorának releváns része: ^{222}Rn $\to$ ^{218}Po $\to$ ^{214}Pb $\to$ ^{214}Bi $\to$ ^{214}Po $\to$ ^{210}Pb. A fent felsorolt izotópok felezési ideje ebben a sorrendben: 3,8 nap; 3,05 perc; 26,8 perc; 19,9 perc; 64 μs; 22 év.

(Veres Gábor)

30. Egy spint fehérzaj-szerűen változó, külső z irányú homogén mágneses térbe helyezünk. Az Ito-kalkulus segítségével határozzuk meg a sűrűségmátrix mozgásegyenletét! Nézzük meg, mi történik nagyon hosszú idő után a rendszerrel, ha kezdeti feltételként egy szuperponált állapotból indulunk ki!

(Bernád József)

31. Egy (kvázi-)részecske mozgását leíró Hamilton-operátor a következő alakú:

$$H_0 = \varepsilon(\mathbf{p})\mathbb{1} + \mathbf{\Omega}\,\mathbf{S},$$

ahol $\mathbf{p}$ a részecske impulzusoperátor-vektora, $\varepsilon(\mathbf{p})$ a szokásos diszperziós reláció (például $\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$), $\mathbf{S}$ a j indexű irreducibilis spinmátrixokból álló vektor, $\mathbb{1}$ a $2j+1$ dimenziós egységmátrix, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{Kp}$, $\mathbf{K}$ pedig adott, konstans 3 x 3-as mátrix.

a) Írjuk fel Heisenberg-képben az $\mathbf{r}(t)$ helyoperátor-vektor mozgásegyenletét, és oldjuk meg az operátor-differenciálegyenletet!

b) Mutassuk meg, hogy $j = 1/2$ esetén a legáltalánosabb (nemlineáris) alakú, $\mathbf{p}$-től és $\mathbf{S}$-től függő Hamilton-operátor is a fentihez hasonló alakba írható, ahol $\mathbf{\Omega}(\mathbf{p})$ most a $\mathbf{p}$ impulzusvektor (általában nemlineáris) függvénye lesz! Oldjuk meg ebben az esetben is az $\mathbf{r}(t)$ operátor-vektor mozgásegyenletét!

c) „Preparáljuk" a rendszer $|\psi_0\rangle$ kezdőállapotát: $|\psi_0\rangle = \mathbf{P}\,|\psi\rangle$, ahol $|\psi\rangle$ egy tetszőleges állapotvektor, $\mathbf{P}$ pedig egy alkalmas projektor! Hogy kell a $\mathbf{P}$ projektort megválasztani, ha azt akarjuk, hogy a részecske helyének várható értéke a klasszikus szemlélet alapján elvárható egyenes vonalú egyenletes mozgást végezze?

(Dávid Gyula és Cserti József)

32. Szuperszimmetrikus részecskéket bomlási lánc folyamatban is kereshetünk a 2007-ben induló LHC-n (Large Hadron Collider).

$$\tilde{q}_L \to q\tilde{\chi}_2^0 \to q\tilde{l}l^+ \to ql^+l^-\tilde{\chi}_1^0$$

Egy szkvark bomlik kvarkra és neutralínóra, majd a neutralínó tovább bomlik egy (anti-)leptonra és egy szleptonra, végül a szlepton leptonra és egy könnyebb neutralínóra. (A szuperszimmetrikus standard modellben minden ismert részecskének van egy eltérő spinű párja, a neutralínók a standard semleges bozonok fermionikus párjai, szleptonok a standard leptonok bozonikus párjai.) A kísérleti keresésben a bomlási láncot szeretnénk azonosítani és mérni, a következő feltételekkel: legyen 2 izolált ellenkező töltésű lepton $p_t > 10$ GeV, legalább 4 jet (különálló részecskék „nyoma"), egyik $p_t > 100$ GeV a többi $p_t > 50$ GeV, a hiányzó (nem mért) transzverz energia $E_{T,miss} > max(100\,GeV; 0,2\,M_{eff})$. Itt p_t a gyorsító nyalábra merőleges (transzverz) impulzus (az ebből számolt energia a transzverz energia), és $M_{eff} = \sum_i p_{T,i} + E_T^{miss}$.

Egy p_i $(i = 1, 2, ...n)$ négyesimpulzusú n-részecske rendszer tömege $m_{1..n}^2 = \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^2$. Mutassuk meg, hogy a ql^+l^- rendszer tömege

$$M_{qll}^{min} \simeq 271\,\text{GeV és } M_{qll}^{max} = \sqrt{\frac{\left(M_{\tilde{q}_L}^2 - M_{\tilde{\chi}_2^0}^2\right)\left(M_{\tilde{\chi}_2^0}^2 - M_{\tilde{\chi}_1^0}^2\right)}{M_{\tilde{\chi}_2^0}^2}} \simeq 552\ \text{GeV}$$

közé esik.

(Cynolter Gábor)

33. A kis egyenlítői ország, Gumipart fizikát és fizikusokat igencsak kedvelő (és foglalkoztató) diktátora, dr. Absoluto Zero (viselt dolgairól lásd a korábbi évek Ortvay feladatait) igencsak megörült, amikor elolvasta Arthur C. Clarke „Az éden szökőkútjai" című regényét. Ebben a könyvben a Föld körüli szinkronpályára telepített, és a Földdel űrliftek segítségével összekötött űrállomások végül összeérnek, és merev, a Földhöz „küllőkkel" rögzített gyűrűt alkotnak, ideális letelepedési lehetőséget biztosítva a túlnépesedett bolygó lakóinak. Mi más lenne alkalmasabb alapanyag ennek az álomnak a megvalósítására, mint a a Gumiparton immár tömegesen termesztett, génmanipulált gumipálmák nedvéből készülő szuperszilárd guminanocsövek? És mi másból lehetne finanszírozni egy ilyen kozmikus méretű építkezést, mint Gumipart guminanocsövekből származó horribilis jövedelméből? A gondolatot tett követte, és dr. Absoluto Zero – korábbi jó szokásához híven – ismét magához hívatta udvari főfizikusát.

Ali Tudde Mynek rémülten vette át a diktátor kezéből a gigászi létesítmény tervrajzát. Megpróbálta felhívni dr. Absoluto Zero figyelmét arra az aprócska tényre, hogy a tervrajz eredeti helyzetéhez képest 90 fokkal elfordult, de ezt a figyelmeztetést a diktátor rövid úton lesöpörte. Gumiparton különben is mindig kényes politikai kérdés volt a bal és jobb, valamint a fenn és lenn megkülönböztetése – így aztán a főfizikus nem erőltette tovább a témát.

Megépült tehát a (természetesen dr. Absoluto Zeroról elnevezett) Nagy Kerék. Igaz, nem az Egyenlítő, hanem a Gumipart fővárosán, Port Goomyn áthaladó délkör mentén. Emiatt a korábban jelentkező telepesek nem is nagyon tolongtak az üres telephelyekért. Olyan mondvacsinált okokra hivatkoztak, hogy nagyon lejt a pálya, és nehéz rá házakat építeni. A gumiparti illetékesek ilyenkor mindig leszögezték, hogy ez tévedés, a Nagy Kerék kerülete párhuzamos a Föld felszínével.

a) Segítsünk eldönteni a vitát, állapítsuk meg, és ábrázoljuk grafikusan, hogy milyen hegyvidéki tereppel ekvivalens a Nagy Kerék!
b) Néhány évnyi hiábavaló várakozás után Ali Tudde Mynek új hasznosítási javaslattal rukkolt elő: a Nagy Kerék telepesektől mentes, síma felszíne ideális helyszín a Formula 42 Föld körüli űrautóverseny számára. Vizsgáljuk meg a kérdést, mind a motoros, mind a motor nélküli (álló helyzetből, kezdősebesség nélkül induló) űrautók szempontjából! Hol legyen a starthely, mekkora sebesség érhető el, meddig tart egy Föld körüli futam, mire ügyeljenek a kerékabroncsok tervezői stb! Ne felejtsük el: a Gumiparton termesztett génmódosított gumipálmák nedvéből készülő szuperszilárd guminanocsövek mindent kibírnak!
c) Javasoljunk további (sport-, kulturális, turisztikai, közlekedési stb.) célokat a parlagon heverő (pardon, forgó) Nagy Kerék hasznosítására!

(Dávid Gyula)

\end{document}